Wolffskeel-Realschule

1. Schulaufgabe aus der Mathematik
Lösungsvorschlag

Klasse: 10a — Datum: 14.11.2008

Name:

1. Vereinfachen Sie die folgenden Terme

a) $\sqrt[3]{x^{-6}} = x^{-\frac{6}{3}} = x^{-2}$

b) $\left(\frac{b}{3}\right)^4 : \left(\frac{2b}{3}\right)^{-4} = \left(\frac{b}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2b}{3}\right)^4 = \left(\frac{b \cdot 2b}{3 \cdot 3}\right)^4 = \frac{16b^8}{3^4}$

2. Geben Sie für die folgenden Funktionen jeweils die Definitionsmenge, die Wertemenge und - falls vorhanden - die Gleichungen der Asymptoten an.

a) f_1 mit $y = -3\,(x + 3)^{-0,6} - 4$

$\mathbb{D} = \{x \mid x > -3\}$; $\mathbb{W} = \{y \mid y < -4\}$; Asymptoten: $x = -3$; $y = -4$

b) f_2 mit $y = 0,5\,(x - 1)^{-4} - 3$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$; $\mathbb{W} = \{y \mid y > -3\}$; Asymptoten: $x = 1$; $y = -3$

c) f_3 mit $y = 0,1 \cdot 2^x + 1$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$; $\mathbb{W} = \{y \mid y > 1\}$; Asymptote: $y = 1$

3. Gegeben ist die Funktion f mit $y = 0,5^{1-x} - 2$.

Die Funktion f wird durch Parallelverschiebung mit dem Vektor

$\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ auf die Funktion f ' abgebildet.

Berechnen Sie die Funktionsgleichung von f ' mit dem Parameterverfahren.

I $x' = x + 2$
II $y' = 0,5^{1-x} - 2 - 3$

I $x = x' - 2$
II $y' = 0,5^{1-(x'-2)} - 5$

f': $y = 0,5^{3-x} - 5$

4. Welche Symmetrie besitzt die Funktion f: $y = 2{,}5\ x^{-6}$?

Beweisen Sie die Symmetrie durch Rechnung.

Achsensymmetrie zur y-Achse

f(-x) $= 2{,}5\ (-x)^{-6} = 2{,}5\ x^{-6}$ **= f(x)**

5. Die Funktion f hat die Gleichung $y = 3^{x-2} - 2$.

Berechnen Sie die Nullstelle von f.

1. Lösungsweg

$3^{x-2} - 2 = 0 \mid +2$

$3^{x} \cdot 3^{-2} = 2 \mid : 3^{-2}$

$3^{x} = 18$

$x = log_3 18$

$\boldsymbol{x = 2,63}$

2. Lösungsweg

$3^{x-2} - 2 = 0 \mid +2$

$3^{x-2} = 2$

$x - 2 = log_3 2$

$x - 2 = 0{,}63 \mid +2$

$\boldsymbol{x = 2,63}$

6. Überprüfen Sie rechnerisch, ob die Exponentialfunktionen f_1 mit $y = 4 \cdot 2^{x}$ und f_2 mit $y = 0{,}5 \cdot 2^{x+3}$ identische Funktionen sind.

$f_2 : y = 0{,}5 \cdot 2^{x+3} = 0{,}5 \cdot 2^{x} \cdot 2^{3} = 4 \cdot 2^{x} \Rightarrow f_1 = f_2$

7. Fassen Sie zu einem Logarithmus zusammen

$a)\ log_5 x - log_5 y + 1 = log_5 \frac{5x}{y}$, da $1 = log_5 5$

$b)\ 2\ log_3 x + \frac{1}{3} log_3 100 = log_3(x^2 \cdot 100^{\frac{1}{3}})$

8. Berechnen Sie die Lösung der Gleichung:

$8 \cdot 2^{x-2} + 2^{x} = 5^{x}$

$\Leftrightarrow 8 \cdot 2^{x} \cdot 2^{-2} + 2^{x} = 5^{x}$

$\Leftrightarrow 2 \cdot 2^{x} + 2^{x} = 5^{x}$

$\Leftrightarrow 3 \cdot 2^{x} = 5^{x} \quad | : 2^{x}$

$\Leftrightarrow 3 = \left(\frac{5}{2}\right)^{x}$

x = $\boldsymbol{log_{2,5} 3}$ **= 1,20**

Hinweis: Für $5^{x} - 2^{x}$ gibt es <u>kein</u> Potenzgesetz.

9.0 Zu Beginn des Jahres 1958 wurde der Anteil an Kohlendioxid in der Atmosphäre mit 2448 Milliarden Tonnen Kohlendioxid angegeben. Danach nahm der Anteil jährlich um 0,4 % zu. Unter der Annahme, dass der prozentuale Zuwachs auch weiterhin gleich bleibt, kann der CO_2 – Anteil von y Milliarden Tonnen CO_2 im x-ten Jahr nach 1958 mit Hilfe der Gleichung

$y = 2448 \cdot 1{,}004^{x}$ berechnet werden.

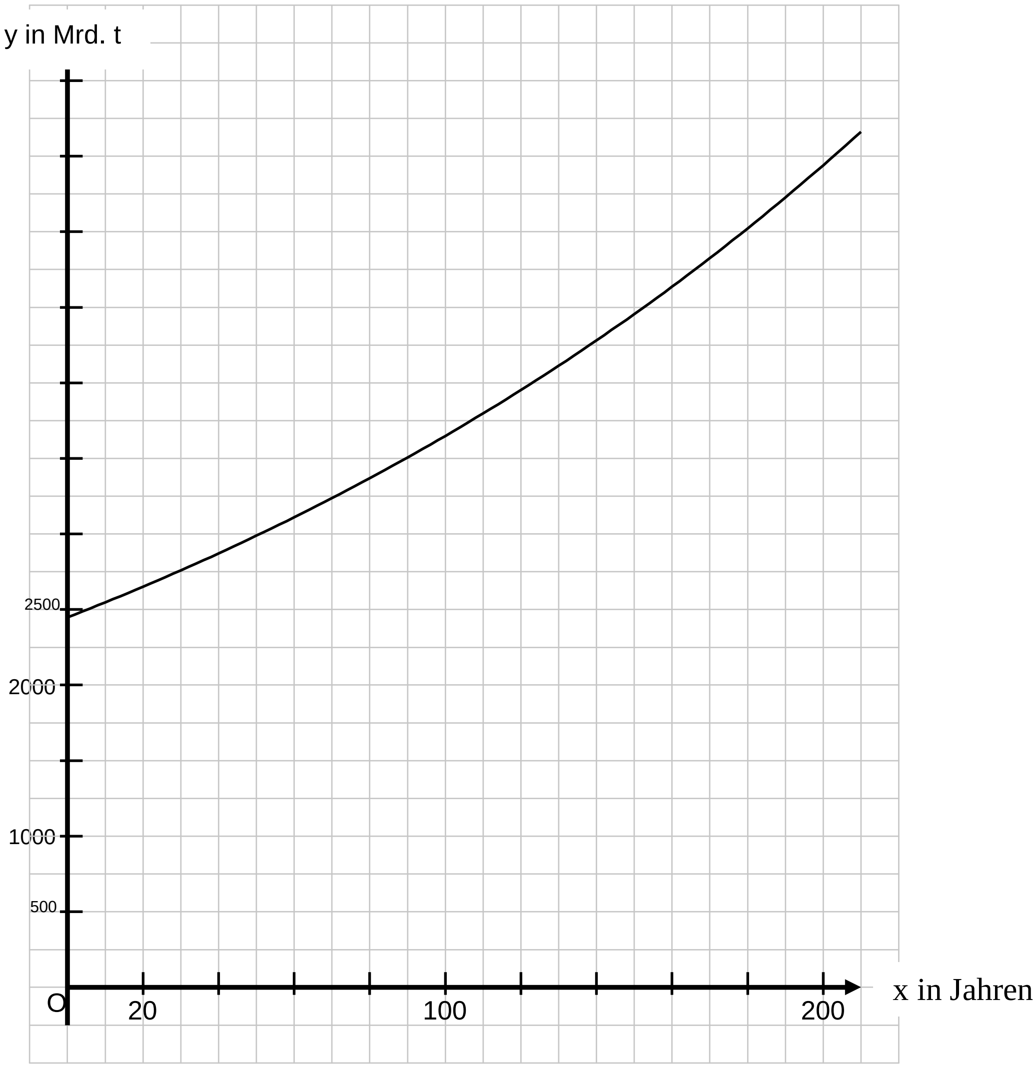
Diese Gleichung legt eine Funktion f mit $\mathbb{G} = \mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}^+$ fest.

9.1 Tabellarisieren Sie die Funktion f für $x \in [\,0; 180\,]$ in Schritten von $\Delta x = 20$ auf ganze Zahlen gerundet. Zeichnen Sie sodann den Graphen in ein Koordinatensystem.

Für die Zeichnung: Auf der x – Achse: 1 cm für 20 Jahre; $0 \leqq x \leqq 200$

Auf der y – Achse: 1 cm für 500 Milliarden Tonnen; $0 \leqq y \leqq 6000$

x in Jahren	0	20	40	60	80	100	120	140	160	180
y in Mrd. t	2448	2651	2872	3111	3369	3649	3952	4281	4637	5022



9.2 Berechnen Sie auf ganze Zahlen gerundet, wie viele Milliarden Tonnen der CO_2 – Anteil in der Atmosphäre zu Beginn des Jahres 2009 beträgt.

x = 51; $y = 2448 \cdot 1{,}005^{51} = 3001$

Zu Beginn des Jahres 2009 ist der Anteil bei 3001 Mrd. t.

9.3 Ermitteln Sie durch Rechnung, im Laufe welchen Jahres sich der CO_2 – Anteil gegenüber dem CO_2 – Anteil von 1958 voraussichtlich verdoppeln wird.

$2 = 1{,}004^{x}$

x = $log_{1,004}2 = 173{,}63$

Im Laufe des Jahres 2131 wird sich der Anteil verdoppelt haben.